

2024年秋季学期数学期中考试测试题

考试对象：24 综合高中班，普高班，总分 150 分，得分：

一、单选题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 若 $A = \{x | 0 < x < \sqrt{2}\}$ ， $B = \{x | 1 \leq x < 2\}$ 。则 $A \cup B =$ (D)

A. $\{x | x \leq 0\}$ B. $\{x | x \geq 2\}$

B. C. $\{x | 0 \leq x < \sqrt{2}\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

2. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 集合 $M = \{1, 2\}$ 集合 $N = \{3, 4\}$

则 $C_U(M \cup N) =$ (A)

A. $\{5\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

3. “ $ab=0$ ”是“ $a=0$ ”的 (B)

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 命题“ $\exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x)=x$ ”的否定是 (C)

A. $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x)=x$ B. 不存在 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) \neq x$

C. $\forall x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) \neq x$ D. $\exists x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) \neq x$

5. 下列说法正确的是 (D)

A. a 不是负数，则 $a > 0$ B. b 是不大于 0 的数，则 $b < 0$

C. m 不小于 -1，则 $m > -1$ D. $a+b$ 是负数，则 $a+b < 0$

6. 不等式 $19x - 3x^2 \geq 6$ 的解集是 (B)

A. $\{x | -6 \leq x \leq -1/3\}$ B. $\{x | 1/3 \leq x \leq 6\}$

C. $\{x | x \leq -6$ 或 $x \geq -1/3\}$ D. $\{x | x \leq 1/3$ 或 $x \geq 6\}$

7. 已知 $x > 1$, 则函数 $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值为 (A)

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

8. "x=1"是" $x^2-2x+1=0$ "的 (A)

- A.充要条件 B 充分不必要条件
C.必要不充分条件 D.既不充分也不必要条件

二、多选题 (本大题 3 小题每小题 6 分共 18 分, 在给出的四个选项中, 有多个项符合题目要求, 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分)

9.下列说法正确的是 (BC)

- A. 若 $a < b$, 则 $ac < bc$ 一定成立
B. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
C. 若 $a > b, c > d$ 则 $a + c > b + d$
D. $a > b$ 是 $a^2 > b^2$ 的充分不必要条件

10.下面有几个命题, 其中说法正确的是 (CD)

- A.集合 N 中最小的元素是 1
B.若 $-a$ 不属于集合 N, 则 a 属于集合 N
C.若 a 属于 N, b 属于 N, 且 $a \neq b$, 则 $a + b$ 的最小值是 1
D. $a > b$ 是 $a^2 > b^2$ 的充分不必要条件

11.下列命题中, 既是全称量词又是真命题的是 (BCD)

- A.任意实数 $x < 0$, 使 $x^2 \geq 0$ B.末尾数字是 0 的整数都是 5 的倍数
C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 \neq 0$, D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$

三、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12.已知 x, y 都是正数若 $x + 2y = 2$, 则 xy 的最大值是 $\frac{1}{2}$

13.函数 $y = \sqrt{x-1}$ 的定义域是 $\{x \mid x \geq 1\}$

14.集合 $\{-1, 0, 1\}$ 共有 8 个子集

四、解答与证明题 (本大题共 5 小题, 共 77 分, 计算题应写出计算过程, 并在相应位置上作答)

15. (13 分) 比较下列两个代数式的大小

(1) $x^2 + 5x + 6$ 与 $2x^2 + 5x + 9$ (6 分)

(2) 当 $x > 1$ 时, x^2 与 $x^2 - x + 1$ (7 分)

(1) 解:

$$(2x^2 + 5x + 9) - (x^2 + 5x + 6)$$

$$= x^2 + 3 > 0$$

$$\therefore x^2 + 5x + 6 < 2x^2 + 5x + 9$$

(2) 解:

$$x^2 - (x^2 - x + 1) = x - 1$$

$$\therefore x > 1$$

$$\therefore x - 1 > 0$$

$$\therefore x^2 > x^2 - x + 1$$

16. (15 分) 已知 $-3 < a < 5, 2 < b < 8$.

(1) 求 $2a + b$ 的取值范围 (7 分)

(1) 解: $\therefore -3 < a < 5$

$$\therefore -6 < 2a < 10$$

$$-8 < -b < -2$$

$$\therefore -4 < 2a + b < 18$$

(2) 求 $2a - b$ 的取值范围 (8 分)

(2) 解: $\therefore -3 < a < 5, 2 < b < 8$

$$\therefore -6 < 2a < 10,$$

$$\therefore -14 < 2a - b < 8$$

17. (15 分) 求下列不等式的解集

(1) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ (7 分)

(1) 解:

解方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 得

$$x_1 = 2, x_2 = 3$$

\therefore 原不等式的解集是

$$\{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}.$$

(2) $-x^2 + x + 12 > 0$ (8 分)

(2) 解:

解方程 $x^2 - x - 12 = 0$ 得

$$x_1 = -3, x_2 = 4$$

\therefore 原不等式的解集是

$$\{x \mid -3 < x < 4\}.$$

18 (17分) (1) 已知 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ 求 $A \cap B, A \cup B$ (6分)

(2) 已知全集 $U = \mathbb{R}, A = \{x | -4 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ 求 $A \cap B, (C_U A) \cap (C_U B)$ (11分)

(1) 解: $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 3, 5\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

(2) 解: $A \cap B = \{x | -4 \leq x \leq 2\} \cap \{x | -1 \leq x \leq 3\} = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$

$$C_U A = \{x | x < -4 \text{ 或 } x > 2\}, C_U B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$$

$$\begin{aligned} (C_U A \cap (C_U B)) &= \{x | x < -4 \text{ 或 } x > 2\} \cap \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\} \\ &= \{x | x < -4 \text{ 或 } x > 3\} \end{aligned}$$

19. (1) 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 求 $x + 2y$ 的最小值 (7分)

(2) 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $9x + y = xy$, 求 $x + y$ 的最小值 (10)

解: (1) $\because x > 0, y > 0$

$$\therefore x + 2y = (x + 2y) \left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y} \right) = 8 + \frac{x}{y} + \frac{16y}{x} + 2$$

$$= 10 + \frac{x}{y} + \frac{16y}{x} \geq 10 + 8 = 18$$

\therefore 当且仅当 $\frac{x}{y} = \frac{16y}{x}$ 即 $x^2 = 16y^2$ 时, $x + 2y$ 取得最小值, 最小值是

18.

(2) 由 $9x + y = xy$ 得 $\frac{9}{y} + \frac{1}{x} = 1$.

$\therefore x > 0, y > 0$

$$\therefore x + y = (x + y) \left(\frac{9}{y} + \frac{1}{x} \right) = \frac{9x}{y} + 1 + 9 + \frac{y}{x}$$

$$=10 + \frac{9x}{y} + \frac{y}{x} \geq 10 + 6 = 16$$

\therefore 当且仅当 $\frac{9x}{y} = \frac{y}{x}$ 即 $9x^2 = y^2$ 时, $x+y$ 取得最小值, 最小值是 16.